a l c u n i   t e o r e m i   s u l l' a d d i z i o n e   e   l' o p p o s i z i o n e

Gli assiomi riguardanti l'addizione (detti perciò "additivi"):

- **commutatività: $x + y = y + x$**
- **associatività: $(x + y) + z = x + (y + z)$**
- **neutralità dello zero: $x + 0 = x$**
- **simmetricità degli opposti rispetto allo zero: $x + (- x) = 0$**

caratterizzano un tipo di struttura algebrica detta *gruppo commutativo* (o *gruppo additivo*). Da essi possono essere ricavate alcune notevoli proprietà, usate nel calcolo algebrico elementare:

- passaggio di un addendo da un membro all'altro di un'uguaglianza: se $x + y = z$ allora $x = z - y$ e $y = -x + z$ (ricordiamo che la scrittura a-b è una contrazione di a+(-b))
  - infatti: partendo da $x+y=z$ si aggiunge $-y$ ad entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene: $(x+y)+(-y)=z+(-y)$ e per via degli assiomi additivi: $x+(y-y)=z-y$ da cui: $x+0=z-y$ da cui: $x=z-y$. Analogamente si procede per dedurre $y=-x+z = z-x$.
- centralità dello zero: $- 0 = 0$
  - partendo da $0+0=0$ (neutralità di 0) si applica la proprietà precedente: $0=-0+0=-0$
- involutività dell'opposizione: $- (- x) = x$
  - partendo da $x+(-x)=0$ (simmetria) si porta $-x$ al 2° membro: $x=0-(-x)=-(-x)$
- distributività dell'opposizione rispetto all'addizione: $- (x + y) = - x - y$
  - da $(x+y)-(x+y)=0$ segue: $x+(y-(x+y))=0$, quindi $y-(x+y)=-x$, quindi $-(x+y)=-x-y$
- distributività dell'opposizione rispetto alla sottrazione: $- (x - y) = - x + y$
  - questa non è altro che la proprietà precedente combinata con l'involutività dell'opposizione. E' questa proprietà che si applica per dedurre uguaglianze del tipo: $-5+3=-(5-3)=-2$.

a l c u n i   t e o r e m i   s u l l a   m o l t i p l i c a z i o n e   e   l' i n v e r s i o n e

Dagli assiomi riguardanti la moltiplicazione (detti perciò "moltiplicativi")

- **commutatività: $x \cdot y = y \cdot x$**
- **associatività: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$**
- **neutralità dell'uno: $x \cdot 1 = x$**
- **simmetricità degli inversi rispetto all'uno: $x \cdot (1/x) = 1$, per ogni $x \neq 0$**
- **distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione: $x \cdot (y + z) = x\cdot y + x\cdot z$**

possono essere ricavate alcune importanti proprietà, usate nel calcolo:

- $x\cdot 0 = 0 = 0\cdot x$ (proprietà di assorbimento dello 0 rispetto alla moltiplicazione)
  - usando la proprietàla distributività: $x\cdot(0+0)=x\cdot 0$, da cui $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0$, da cui $x\cdot 0=0$. la seconda ugluaglianza segue dalla commutatività della moltiplicazione.
- $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = - x\cdot y$ (regola "dei segni" per la moltiplicazione)
  - usiamo la convenzione (semplificatrice) di non scrivere il puntino (·) della moltiplicazione. Da: $(x-x)y=0y$ si ricava $x\cdot y+(-x)\cdot y=0$ da cui $(-x)\cdot y=-x\cdot y$.
    Per la parte: $x\cdot(-y)=-x\cdot y$ basta osservare che vale la commutatività della moltiplicazione .
    Notiamo infine che da questa proprietà deriva anche che:
    $(-x)\cdot(-y) = - x\cdot(-y) = - (- x\cdot y) = x\cdot y$.
- $(x/y)\cdot y = x$ (ricordiamo che la scrittura a/b, detta "frazione" è una contrazione di a(1/b) ossia a·(1/b))
  - infatti applicando associatività, commutatività, neutralità dell'uno e simmetricità degli inversi: $(x/y)y = (x(1/y))y=x((1/y)y)=x(y(1/y))=x\cdot 1=x$
- passaggio di un fattore da un membro all'altro di un'uguaglianza: se $xy = z$, allora $x = z/y$ e $y = z/x$
  - moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza $xy=z$ per $1/y$ si ricava $xy(1/y)=z/y$, ossia $x\cdot 1=z/y$, ovvero $x=z/y$. Analogamente si procede per passare a $y=z/x$.
- $1/(xy) = (1/x)(1/y)$ (distributività dell'inversione rispetto alla moltiplicazione)
  - partendo dal fatto che $(1/x)(1/y)(xy)=(1/x)x(1/y)y=1\cdot 1=1$, si passa poi xy all'altro membro
  - questa regola permette di moltiplicare due frazioni tramite la regola: $(x/y)(a/b)=(xa)/(xb)$; infatti: $(x/y)(a/b) = x(1/y)a(1/b) = (xa)(1/y)(1/b) = (xa) (1/(yb)) = (xa)/(yb)$.
- $x/y = (xz)/(yz)$ (invarianza, o "invariantività", di una frazione)
  - infatti, usando la proprietà precedente: $(xz)/(yz) = (xz)\cdot(1/(yz)) = (xz)\cdot(1/y)(1/z) = x(1/y)z(1/z) = x(1/y) = x/y$.
  - questa regola permette di sommare due frazioni: $x/y + a/b = (xb)/(yb)+(ya)/(yb)=(xb+ya)/(yb)$.